

## Analisis Dinamika Epidemik HIV/AIDS Dengan Pengaruh Kelompok Umur Dan Kompetisi Internal

MARSUDI <sup>a)</sup>, KWARDINIYA A. <sup>a)</sup>

<sup>a)</sup> Jurusan Matematika , Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya, Malang, Indonesia

diterima 27 Januari 2010, direvisi 19 Maret 2011

### ABSTRAK

Penularan HIV/AIDS di Indonesia potensial berkembang menjadi sangat parah. Bagaimana situasi epidemik HIV/AIDS di Indonesia di masa depan masih belum jelas. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal melalui model matematika sederhana (model *SI*).

Model kompartemen *SI* diperoleh dengan menerjemahkan mekanisme penyebaran penyakit yang akan disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Parameter-parameter model diperoleh dengan cara estimasi menggunakan data HIV/AIDS di Indonesia dari literatur-literatur yang relevan. Kestabilan lokal titik kesetimbangan dideskripsikan menggunakan analisis nilai eigen matriks Jacobi dan kestabilan global dianalisis menggunakan prinsip invariansi Lyapunov-LaSalle.

Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia tahun 2007, nilai ambang rasio reproduksi *infected*

$R_0 = 0.000035$ , rasio reproduksi *susceptible*  $R_1 = 100.60235$ , dan laju kontak infeksi  $R_2 = 3.50192$ . Model epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh dua kelompok umur dan kompetisi internal hanya mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (34258263, 6455834, 0, 0)$  yang stabil asimtotik lokal dan tidak stabil global.

Kata kunci: CO<sub>2</sub>, sistem instrumentasi, pengukuran online

### ABSTRACT

Transmission of HIV/AIDS in Indonesia has potential rounding into very hard. How situation of HIV/AIDS epidemics in Indonesia in future still is unclear. This research aim to analyze of HIV/AIDS epidemics dynamics with influence of age group and internal competition through the simple mathematics model.

The *SI* compartment model is obtained by translating mechanism spreading of disease to be presented in the form of system of nonlinear differential equations. The model parameters obtained by estimation use data of HIV/AIDS in Indonesia from relevant literatures. The local and global stability for the equilibrium point is described use analysis of eigenvalues of Jacobian matrix and Lyapunov-LaSalle's invariant principle.

For the case of data of HIV/AIDS in Indonesia 2007, threshold values of infected reproduced ratio,  $R_0 = 0.000035$  susceptible reproduced ratio,  $R_1 = 100.60235$  and infection contact rate,  $R_2 = 3.50192$ . The HIV/AIDS dynamics model with two age groups and internal competition has a unique disease-free equilibrium point. The disease-free equilibrium point  $E_0^* =$

-----  
\*Corresponding author : Marsudi ,  
E-mail: marsudi61@ub.ac.id

**(34258263,6455834, 0, 0) is locally asymptotically stable and global unstable.**

Key word: HIV/AIDS epidemics, the SI model, local and global stability.

---

## PENDAHULUAN

Beberapa tahun terakhir, penularan epidemik HIV/AIDS di Indonesia ber-kembang pesat. Program pengendalian epidemik HIV/AIDS saat ini terdiri atas upaya pencegahan, pengobatan, dukungan dan perawatan bagi orang yang hidup dengan HIV/AIDS dan pengawasan. Pemerintah RI, UNDP dan para mitra lainnya bekerja sama menyusun rencana nasional yang akan membawa hasil yang nyata dan berkelanjutan dalam memerangi HIV/AIDS.

Menurut Anonim (2004), kasus AIDS pertama kali dilaporkan di Indonesia pada tahun 1987 yang menimpa seorang warga negara asing di Bali. Tahun berikutnya mulai dilaporkan adanya kasus di beberapa provinsi. Pada tahun 2002, Departemen Kesehatan memperkirakan ada 90.000-130.000 orang yang hidup dengan HIV/AIDS (ODHA) dan terdapat 2.250-3.250 bayi yang mempunyai risiko terlahir dengan infeksi HIV. Penderita AIDS umumnya usia remaja dan usia produktif yang mencapai kira-kira 50%. Pola penyebaran infeksi yang umum terjadi melalui hubungan seksual kemudian yang kedua melalui penggunaan napza suntik. Saat ini epidemik HIV di Indonesia masih terkonsentrasi, dengan tingkat penularan HIV yang rendah pada populasi umum, namun tinggi pada populasi-populasi tertentu. Ancaman epidemik telah terlihat melalui data infeksi HIV yang terus meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa HIV/AIDS telah menjadi ancaman bagi Indonesia.

Di pihak lain, jika jumlah populasi terus meningkat dan sementara keadaan demografi atau lingkungannya mempunyai jumlah sumber yang terbatas, maka akan terjadi kepadatan penduduk (kompetisi internal) dan mempengaruhi keberlangsungan hidup bahkan dapat menyebabkan kematian individu dalam populasi tersebut. Kepadatan penduduk atau

kompetisi internal terjadi jika individu dari populasi yang sama berpengaruh negatif terhadap kebugaran individu yang lain karena mereduksi ketersediaan sumber yang terbatas. Pada tingkat individu, kompetisi terhadap sumber dapat mempengaruhi perkembangan, kelahiran, dan kelangsungan hidup. Pada tingkat populasi, kompetisi internal terhadap sumber dapat menimbulkan pertumbuhan populasi logistik.

Matematika, khususnya pemodelan matematika telah banyak membantu dalam pemahaman fenomena penyebaran epidemik penyakit infeksius. Dalam penelitian ini akan dianalisis dan disimulasikan model dinamika epidemik HIV/AIDS di Indonesia dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal. Penelitian ini termasuk dalam *road map* Program Studi Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Tahun 2009-2011, khususnya *domain Biomath* dalam bidang sains.

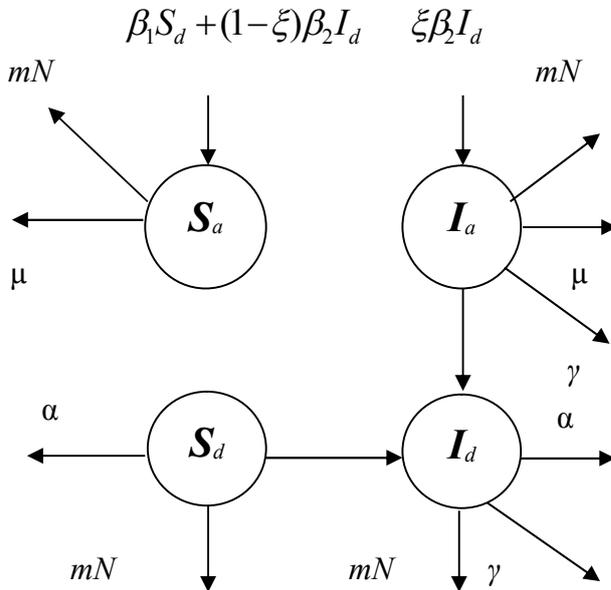
## METODE PENELITIAN

**Sumber Data.** Data yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa data demografik dan data empirik penyakit HIV/AIDS di Indonesia.

Data empirik penyakit HIV/AIDS diambil dari Direktorat Jendral Penanggulangan Penyakit Menular dan Penyehatan Lingkungan (PPM & PLP) Departemen Kesehatan RI dan data demografik (jumlah penduduk Indonesia) diambil dari Biro Pusat Statistik. Selain itu, parameter model akan diestimasi atau diambil dari literatur-literatur yang relevan.

**Rancangan Model.** Model epidemik HIV/AIDS dideskripsikan menggunakan model kompartemen (Gambar 1, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak berusia 0-14 tahun dan kelompok dewasa berusia 15 tahun ke atas. Secara epidemiologi, masing-masing subpopulasi terdiri dari dua kelompok,

yaitu *susceptible* ( $S$ ) dan *infected* ( $I$ ). Secara skematis, transisi antara kedua subpopulasi dapat disajikan dalam diagram kompartemen berikut



Gambar 1 Diagram kompartemen SI dengan dua kelompok Umur

Dimana  $N$  adalah ukuran populasi total,  $S_a$  adalah ukuran subpopulasi *susceptible* anak-anak,  $I_a$  adalah ukuran subpopulasi *infected* anak-anak,  $S_d$  adalah ukuran subpopulasi *susceptible* dewasa,  $I_d$  adalah ukuran subpopulasi *infected* dewasa,  $\beta_j$  ( $j=1, 2$ ) adalah angka kelahiran per kapita subpopulasi (anak-anak atau dewasa),  $\eta_j$  ( $j=1, 2$ ) adalah angka maturasi per kapita subpopulasi (anak-anak atau dewasa)  $\mu_j$  ( $j=1, 2$ ), adalah angka kematian alami subpopulasi anak-anak,  $\alpha$  adalah angka kematian per kapita dari individu dewasa,  $\gamma$  adalah angka kematian per kapita dari penyakit,  $\nu$  adalah peluang kontak antara individu *susceptible* dewasa dengan *infected* dewasa,  $\nu$  adalah peluang kontak antara individu *susceptible* dewasa dengan *infected* dewasa,  $m$  adalah parameter kompetisi internal,  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) adalah bagian yang lahir sehat dari ibu terinfeksi. Selanjutnya diasumsikan: tidak ada emigrasi/imigrasi, diinterpretasikan kedewasaan sebagai emigrasi dari tingkat anak-anak dan imigrasi ke dalam tingkat dewasa, individu tidak kebal, hanya individu dewasa yang dapat melahirkan, angka kematian kedua subpopulasi anak-anak identik terhadap angka

kematian,  $\mu_j$  ( $j=1, 2$ ), dan tidak ada infeksi karena kontak seksual dalam subpopulasi anak-anak.

c. Metode Analisis

Penelitian ini terdiri dari tiga tahap dan masing-masing tahap dianalisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

**Metode Analisis.** Penelitian ini terdiri dari tiga tahap dan masing-masing tahap dianalisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Tahap 1 :

Memperoleh model deterministik (Model SI) dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal: (i) Menghitung parameter-parameter model menggunakan rumus-rumus dari literatur yang relevan. (ii) Menentukan model deterministik (Model SI) berdasarkan desain penelitian menggunakan model persamaan diferensial nonlinear.

Tahap 2 :

Mengkaji secara analitik perilaku kualitatif model yang telah diperoleh menggunakan analisis dinamik:

- (i) Menentukan titik-titik kesetimbangan model.
- (ii) Melakukan analisis kestabilan terhadap titik-titik kesetimbangan (lokal dan global).

Kestabilan lokal dikaji menggunakan konsep nilai eigen dari Matriks Jacobi sistem, yaitu: jika semua nilai eigen matriks Jacobi dari model bernilai real negatif, maka titik kesetimbangan model adalah stabil asimtotik *local*. Kestabilan global dikaji menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, yaitu: Misalkan  $V:R^n$  adalah fungsi Lyapunov untuk  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in R^n$  pada daerah  $\Omega \subset R^n$  Misalkan  $E = \{x \in \Omega | V(x) = 0\}$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar dalam  $E$ . Maka setiap solusi terbatas  $x(t)$  dalam  $\Omega$  menuju  $M$  untuk  $t \rightarrow \infty$

Tahap 3 :

Mengkaji secara numerik perilaku kualitatif model yang telah diperoleh menggunakan alat bantu program Matlab:

- (i) Mengeplot solusi numerik dari masing-masing subpopulasi ( $S_a$ ,  $I_a$ ,  $S_d$  dan  $I_d$ ) terhadap waktu menggunakan parameter-parameter epidemiologi dan parameter geografi yang diberikan.

(ii) Menganalisis hasil (i) dari Tahap 3 dan membandingkan dengan hasil dari Tahap 2.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

**Nilai Parameter Model.** Berdasarkan data dari Biro Pusat Statistik, data dari Ditjen P2PL dan Depkes RI pada tahun 2007, nilai-nilai parameter model dihitung menggunakan rumus dari Lopez *et al.* (2007) dan hasilnya disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1 Nilai Parameter Model Epidemik HIV/AIDS

No	Parameter	Nilai (tahun)
1.	$\beta_1$	2.19994
2.	$\beta_2$	0.00006
3.	$\mu$	0.0345
4.	$\alpha$	0.01409
5.	$\gamma$	0.05632
6.	$\nu$	0.24657
7.	$\eta_1$	0.0625
8.	$\eta_2$	$7.8 \times 10^{-9}$
9.	$m$	

**Model Dinamika Epidemik HIV/AIDS.** Dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal internal dapat digambarkan menggunakan model deterministik atau model kompartemen. Model deterministik ini merupakan model SI yang membagi populasi ke dalam dua subpopulasi (kelompok umur anak-anak dan dewasa) dan masing-masing subpopulasi terdiri dari kelompok *Susceptibles* ( $S_a$  dan  $S_d$ ) () dan *Infected* ( $I_a$  dan  $I_d$ ). Secara skematis, transisi antara kedua subpopulasi dapat disajikan seperti dalam Gambar 1.

$$\frac{dS_a}{dt} = \beta_1 S_d + (1 - \xi) \beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N \quad (1)$$

$$\frac{dS_d}{dt} = \eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N \quad (2)$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N \quad (3)$$

$$\frac{dI_d}{dt} = \eta_2 I_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N \quad (4)$$

Dengan menerjemahkan model kompartemen tersebut ke dalam model matematika diperoleh sistem persamaan diferensial taklinear (persamaan 1-4) dengan  $N = S_a + I_a + S_d + I_d$ . Diasumsikan bahwa dalam model ini penyakit tanpa *recovery* dan perubahan populasi total adalah konstan.

**Titik Kesetimbangan Model.** Titik kesetimbangan model dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal diperoleh dari sistem 1 (persamaan 1-4) dengan menyamakan ruas kanan sama dengan nol, yaitu :

$$\frac{dS_a}{dt} = \frac{dS_d}{dt} = \frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_d}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$\beta_1 S_d + (1 - \xi) \beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N = 0 \quad (6)$$

$$\eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N = 0 \quad (7)$$

$$\xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N = 0 \quad (8)$$

$$\eta_2 I_a + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N = 0 \quad (9)$$

(i) *Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit*

Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal terjadi jika tidak ada individu yang terinfeksi dalam subpopulasi anak-anak dan subpopulasi dewasa. Dari kondisi kesetimbangan (persamaan 6-9), syarat cukup adanya titik kesetimbangan bebas penyakit untuk sistem (1) disajikan dalam Proposisi 1.

**Proposisi 1.** Jika maka terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit untuk sistem 1 (persamaan 1-4) dengan

$$S_a^* = \frac{(\alpha + m N_1^*) N_1^*}{\alpha + \eta_1 + m N_1^*}, \quad (10)$$

$$S_d^* = \frac{\eta_1 N_1^*}{\alpha + \eta_1 + m N_1^*} \quad (11)$$

$$N_1^* = \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1)]}}{2m} \quad (12)$$

di mana

$$R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right) \quad (13)$$

adalah rasio reproduksi *susceptible*.

(ii) *Titik Kesetimbangan Kepunahan Susceptible*

Titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* (*susceptible extinction*) terjadi jika tidak ada individu sehat dalam subpopulasi anak-anak dan

tidak ada individu sehat dalam subpopulasi dewasa. Dari kondisi kesetimbangan (persamaan 6-9), syarat cukup adanya titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* untuk sistem 1 (persamaan 1-4) disajikan dalam Proposisi 2.

**Proposisi 2.** Jika maka terdapat satu titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* dengan

$$I_a^* = \frac{(\alpha + \gamma + m N_2^*) N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + m N_2^*}, \quad (14)$$

$$I_d^* = \frac{\eta_2 N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + m N_2^*} \quad (15)$$

di mana

$$R_0 = \left( \frac{\xi \beta_2}{\alpha + \gamma} \right) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} \right) \quad (16)$$

adalah rasio reproduksi *infected*.

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1 diperoleh rasio reproduksi *susceptible* dan rasio reproduksi *infected* Menurut Proposisi 1 dan Proposisi 2, sistem 1 (persamaan 1-4) mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit dan tidak terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$ .

Selanjutnya akan dibahas kestabilan dari titik kesetimbangan model epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal.

**Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Model.** Matriks Jacobi dari model (1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - m S_a^* & -m S_d^* & (1 - \xi) \beta_2 - m S_a^* \\ \eta_1 - m S_a^* & \frac{v \beta_1}{(S_a^* + N_1^*)} - [\alpha + m(S_a^* + N_1^*)] & -m S_d^* & \frac{v \beta_2}{(S_a^* + N_1^*)} - m S_a^* \\ -m I_a^* & -m I_d^* & -[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)] & \xi \beta_2 - m I_d^* \\ -m I_a^* & \frac{v \beta_1}{(S_a^* + N_1^*)} - m I_d^* & \eta_2 - m I_d^* & \frac{v \beta_2}{(S_a^* + N_1^*)} - [\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] \end{pmatrix} \quad (17)$$

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1, matriks Jacobi pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (S_a^*, S_d^*, I_a^*, I_d^*) = (34258263, 6455834, 0, 0)$  adalah

$$J(E_0^*) = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - m S_a^* & -m S_d^* & (1 - \xi) \beta_2 - m S_a^* \\ \eta_1 - m S_a^* & -[\alpha + m(S_a^* + N_1^*)] & -m S_d^* & -(v + m S_a^*) \\ 0 & 0 & -(\eta_2 + \mu + \gamma + m N_2^*) & \xi \beta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & v - (\alpha + \gamma + m N_2^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.68178 & 1.93273 & -0.26722 & -0.26716 \\ 0.01215 & -0.38202 & -0.05036 & -0.29693 \\ 0 & 0 & -0.47089 & 0.000006 \\ 0 & 0 & 0.0625 & -0.14141 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Menggunakan alat bantu program Maple, nilai-nilai eigen dari  $J(E_0^*)$  adalah  $\lambda_1 = -0,74625$ ,  $\lambda_2 = -0,31755$ ,  $\lambda_3 = -0,47089$  dan  $\lambda_4 = -0,14141$ . Karena semua nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_0^*)$  adalah negatif, maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^*$  stabil asimtotik lokal.

Untuk memberikan gambaran tentang solusi model dinamika epidemik HIV/AIDS dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk data HIV/AIDS di Indonesia tahun 2007. Menggunakan nilai parameter pada sistem (1) yang disajikan dalam Tabel 1 dan subpopulasi awal (pada tahun 2007), Gambar 1 menyajikan solusi grafik dari sistem (1).

Perilaku dinamika jumlah masing-masing subpopulasi ( $S_a^*$ ,  $S_d^*$ ,  $I_a^*$ , dan  $I_d^*$ ) pada kasus ini diperlihatkan pada Gambar 4.1. Dari Gambar 4.1 tampak bahwa setelah kurang lebih 22 tahun masing-masing kurva dari  $S_a^*$ ,  $S_d^*$ ,  $I_a^*$ , dan  $I_d^*$  konvergen menuju ke  $S_a^* = 34258263$ ,  $S_d^* = 6455834$ ,  $I_a^* = 0$ , dan  $I_d^* = 0$ . Hal ini sesuai dengan hasil analitik yang telah dibahas dalam Seksi 3.4, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal.

Dalam seksi selanjutnya akan dikaji kestabilan global dari masing-masing titik kesetimbangan dari sistem 1 (persamaan 1-4).

**Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Model.** Kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan metode langsung Lyapunov.

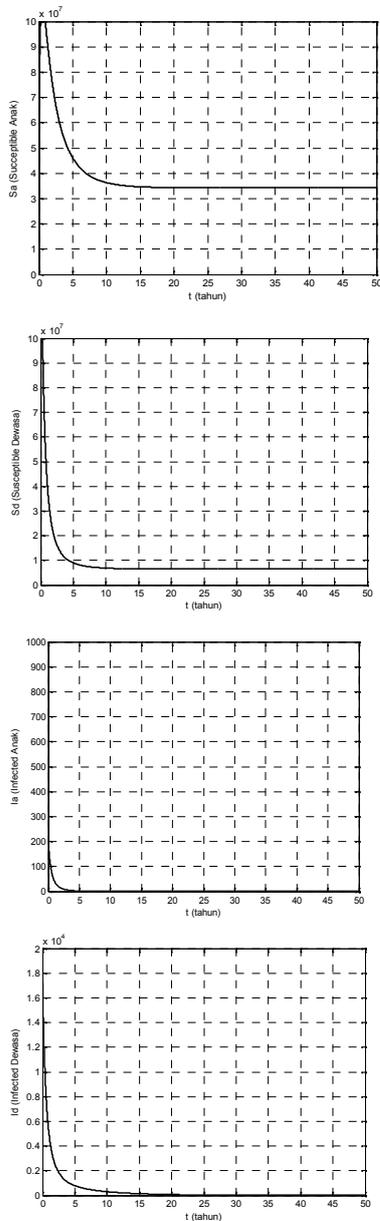
**Proposisi 3** Semua solusi dari sistem 1 (persamaan 1-4) adalah terbatas. Kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit terjadi jika subpopulasi *susceptible* menang berkompetisi melawan subpopulasi *infected*.

Untuk menunjukkan kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit digunakan fungsi Lyapunov

$$V : \Omega = \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (19)$$

dengan

$$V(X) = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} S_a + S_d, \quad X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4. \quad (20)$$



Gambar 1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dari model epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal (Sistem 4.1) untuk kasus HIV/AIDS di Indonesia (Tahun 2007): $S_a(0)=66112939, S_d(0)=66112939, S_d(0)=159511978, I_a(0)= 203$  dan  $I_d(0)=17207$ .

Syarat cukup adanya kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit disajikan dalam Proposisi 4.4.

**Proposisi 4.4.** Jika  $R_2 \leq 1 \leq R_0$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^*=(S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  adalah stabil global dalam  $R_+^4$ .

Kestabilan global dari titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* terjadi jika subpopulasi *infected* menang berkompeterisi melawan subpopulasi *susceptible*.

Untuk menunjukkan kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (4.1) digunakan fungsi Lyapunov  $V : \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in R_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow R$  dengan  $V(X) = \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} I_a + I_d, X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in R_+^4$ . (21)

Syarat cukup adanya kestabilan global dari titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* untuk sistem (4.1) disajikan dalam Proposisi 4.5

**Proposisi 4.5** Jika  $R_1 \leq 1$ . maka titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_1^*=(0, 0, I_a^*, I_d^*)$  dari sistem (4.1) adalah stabil global dalam  $R_+^4$ .

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1 diperoleh nilai-nilai ambang

$$R_0 = \left( \frac{\xi \beta_2}{\alpha + \gamma} \right) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} \right) = 0.000035, \tag{22}$$

$$R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right) = 100.60235 \tag{23}$$

$$R_2 = \frac{\nu}{\alpha + \gamma} = 3.50192. \tag{24}$$

Karena  $R_2 > 1 > R_0$  maka menurut Proposisi 4.4 titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^*=(S_a^*, S_d^*, 0, 0)=(34258263, 6455834, 0, 0)$  tidak stabil global.

**KESIMPULAN**

1. Model epidemik HIV/AIDS dengan dua kelompok umur dan kompetisi internal berbentuk model SI dan membentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Nilai paramer model untuk kasus HIV/AIDS di Indonesia dapat dihitung menggunakan data yang ada tahun 2007.
2. Untuk penyakit tanpa recovery, jika rasio reproduksi *susceptible* lebih besar satu maka terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika rasio reproduksi *infected* kurang dari satu dan jumlah laju kontak

infeksi dan rasio reproduksi infected kurang dari satu, maka subpopulasi infected musnah dan subpopulasi susceptible konvergen menuju ke bilangan positif konstan. Sebaliknya, jika rasio reproduksi infected lebih besar dari satu dan bayi yang lahir dari perempuan hamil terinfeksi adalah infeksi, maka terdapat satu titik kesetimbangan kepunahan susceptible. Jika rasio reproduksi susceptible kurang dari satu dan bayi yang lahir dari perempuan hamil terinfeksi adalah infeksi, maka subpopulasi susceptible musnah dan subpopulasi infected konvergen menuju ke bilangan positif konstan.

3. Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia tahun 2007, nilai ambang rasio reproduksi susceptible  $R_1=100.60235$ , rasio reproduksi infected  $R_0= 0.000035$  dan laju kontak infeksi  $R_2=3.50192$  Model epidemik HIV/AIDS dengan dua kelompok umur dan kompetisi internal mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^*_0 = (34258263,6455834, 0, 0)$  yang stabil asimtotik lokal (tidak stabil global) dan titik kesetimbangan kepunahan susceptible  $E^*_1$  tidak ada.

*Treat or Not to Treat*, Journal of Biological Systems, Vol, 15 No 2.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim (2004) *Perjuangan yang tak Dapat Dianggap Remeh: Menghambat Penyebaran HIV/AIDS di Indonesia*. <http://www.undp.or.id/> Tanggal Akses 12 Nopember 2007.
- [2] Lopez, R., Kuang, Y. dan Tridane, A. (2007). *A Simple SI with Two age groups and Its Application to US HIV epidemics: To*

